مخاطب گرامی! به احترام
تهیه‌کنندگان این فایل، از بازنشر
غیرمجاز آن بپرهیزید.

[redacted]

# ریاضی مهندسی

رایگان

کد محصول: ۱۰۲۳

ویرایش: بهار ۱۳۹۹

www.Amad-Group.ir

## ۵۰ پرسش پایان ترم دانشگاههای سراسری استان تهران

**۱** صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۸–۱۳۹۷

مطلوب است بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{۱}{z(۱-z)}$ حول نقاط $z_۰=۰$ و $z_۰=۱$ و به ترتیب درون ناحیه‌ی محصور به دایره‌هایی به مرکز ۰ و ۱ و شعاع‌های $\dfrac{۱}{۹}$ و $\dfrac{۱}{۴}$.

**۲** صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۸–۱۳۹۷

به کمک فرمول انتگرال کوشی مطلوب است $\oint_\gamma \log(۱+\dfrac{۱}{z})\dfrac{dz}{(z-۲)^۲}$ که در آن $\log$ شاخه اصلی لگاریتم و $\gamma$ دایره‌ی به مرکز $z=۲$ و شعاع ۱ در جهت مثبت است.

**۳** صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۸–۱۳۹۷

فرض کنید $f$ تابع مختلط با ضابطه‌ی $f(z)=\log(۱+\dfrac{۱}{z})$ باشد که در آن $\log$ شاخه اصلی لگاریتم است. با ذکر دلیل مشخص کنید تابع $f$ روی چه زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ تحلیلی است؟

www.Amad-Group.ir

**۴** صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۸–۱۳۹۷

مطلوب است محاسبه‌ی $\int_۰^\infty \dfrac{\cos(۳x)dx}{x^۴+۱}$ به کمک مانده‌های تابع مختلط مناسب.

**۵** صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۸–۱۳۹۷

مقدار انتگرال $\int_{|z|=\frac{۱}{۲}} \dfrac{\cosh\frac{۱}{z}}{۱-z}dz$ را به‌دست آورید.

۶ صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۸–۱۳۹۷

مجموعه‌ی $D := \left\{ z \mid \frac{\pi}{۲} < \operatorname{Im} z < \pi \right\}$ را در نظر بگیرید.

الف) تصویر $D$ را تحت نگاشت $f(z) = e^{z}$ به‌دست آورید.

ب) تصویر $D$ را تحت نگاشت $f(z) = ۱ + e^{-z}$ به‌دست آورید.

www.Amad-Group.ir

۷ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۸–۱۳۹۷

معادله زیر را با استفاده از تبدیل فوریه حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = e^{-t} u_{xx} \;, ۰ < x < \infty \;, t > ۰ \\ u(x,۰) = \begin{cases} x & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & x \geq ۱ \end{cases} \\ u(۰,t) = ۰ \;, \; \lim\limits_{x \to +\infty} u(x,t) = ۰ \;, \; \lim\limits_{x \to +\infty} u_x(x,t) = ۰ \end{cases}$$

۸ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۸–۱۳۹۷

معادله گرمای زیر را در نظر بگیرید.

$$u_t = u_{xx} \;, u(x,۰) = x \;, u(۰,t) = ۰ \;, u(\pi,t) = ۱ \;, ۰ < x < \pi \;, t > ۰$$

ابتدا شرایط مرزی را همگن کرده و سپس معادله جدید را با روش جداسازی متغیرها حل کنید.

۹ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۸–۱۳۹۷

تساوی روبرو را نشان دهید:

$$\int_۰^{\infty} \frac{\sin(\omega x)\sin(\omega\pi)}{۱-\omega^۲} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{۲}\sin x & ۰ \leq x \leq \pi \\ ۰ & x > \pi \end{cases}$$

۱۰ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۸–۱۳۹۷

الف) تابع $f(x) = \begin{cases} -۱ & -۱ < x < ۰ \\ ۱ & ۰ < x < ۱ \end{cases}$ مفروض است. نشان دهید سری فوریه این تابع به‌صورت زیر است.

$$f(x) = \frac{۴}{\pi} \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۲n+۱} \sin((۲n+۱)\pi x)$$

ب) با توجه به قسمت (الف) درستی رابطه روبرو را نشان دهید.

$$\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \cdots$$

www.Amad-Group.ir

۱۱ صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۸–۱۳۹۷

مطلوب است حاصل انتگرال $\int_۰^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ به کمک قضیه مانده‌ها.

**۱۲** صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۸-۱۳۹۷

حاصل انتگرال $\oint_{|z|=1} z^3 \cos(\frac{1}{z})dz$ را بیابید.

**۱۳** صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۸-۱۳۹۷

نوع نقاط تکین توابع زیر را مشخص کرده و مقدار مانده آن‌ها را بیابید.

الف) $I = \frac{\sin z}{z^3 + z}$

ب) $II = \frac{\ln(1+z)}{z^2}$

**۱۴** صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۸-۱۳۹۷

اگر $v(x,y)$ مزدوج همساز $u(x,y) = e^y \sin x$ باشد و $f(z) = u + vi$ تابع تحلیلی باشد حاصل $f'(0)$ را بیابید.

**۱۵** صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۸-۱۳۹۷

در معادله موج داده شده، $u(x,t)$ را به‌دست آورده و سپس $u\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ را محاسبه کنید.

$$u_{xx} = 4u_{tt}\ ,\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\ ,\ u(x,0) = u_t(x,0) = \sin x$$

**۱۶** صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۸-۱۳۹۷

مطلوب است حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ به کمک انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$.

**۱۷** صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۸-۱۳۹۷

اگر C دایره یکه به مرکز مبدأ مختصات باشد، کدام‌یک از انتگرال‌های زیر دارای مقدار مخالف صفر است و این مقدار چقدر است؟

الف) $I_1 = \oint_C \frac{dz}{z^2 + 2z}$

ب) $I_2 = \oint_C \frac{zdz}{z^2 + 4}$

www.Amad-Group.ir

**۱۸** صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۸-۱۳۹۷

تصویر ناحیه محدود به منحنی $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ را تحت نگاشت $\omega = \frac{-i}{z}$ رسم کنید.

**۱۹** علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

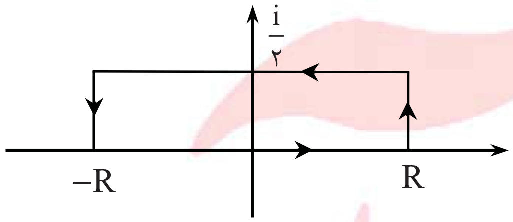
مشتق تابع $f(z) = \frac{|z-1|^2}{z-1} + |x| + iy$ را در نقاطی که دارای مشتق است بیابید.

**۲۰ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶**

فرض کنید $u=u(x,y)$ در دامنه $D$ از صفحه یک تابع غیرثابت و همساز است. تمامی توابع از $u$ مانند $f(u)$ را بیابید که در $D$ همساز باشند.

**۲۱ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶**

ابتدا نشان دهید $e^{-x^2}\cos x = e^{-\frac{1}{4}}\operatorname{Re}\left(e^{-(x+\frac{1}{2}i)^2}\right)$. سپس با انتگرال‌گیری از تابع $f(z)=e^{-z^2}$ بر روی مسیر داده شده، مقدار $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos x\,dx$ را محاسبه کنید.




www.Amad-Group.ir

**۲۲ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶**

هریک از دو انتگرال زیر را محاسبه کنید.

الف) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta_1}{1-2a\sin 4\theta_1 + a^2}\ ,\ |a|<1$

ب) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx$

**۲۳ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶**

اگر $a$ عددی حقیقی بوده و $|a|<1$. نشان دهید سری لوران تابع $f(z)=\dfrac{a}{z-a}$ در ناحیه $|a|<|z|<\infty$ به‌صورت $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}$ می‌باشد، سپس با استفاده از آن ثابت کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{\alpha\cos\theta - a^2}{1-2a\cos\theta + a^2}$$

**۲۴ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶**

ابتدا تصویر ناحیه $D=\left\{z : e^{\frac{1}{2}} \le r \le e^{\frac{3}{2}}, \frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{3}\right\}$ را تحت نگاشت $w=\sin(\ln z)$ بیابید.

سپس نشان دهید نگاشت موبیوس $w=\dfrac{z-\alpha}{1-\alpha z}$ $(|\alpha|<1)$ دیسک $|z|\le 1$ را به روی دیسک $|w|\le 1$ می‌نگارد به‌طوری که $|z|=1$ به $|w|=1$ و نقطه $z=\alpha$ به نقطه $w=0$ نگاشته می‌شوند.

**۲۵** صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

معادله لاپلاس روبرو را در نظر بگیرید.

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad u(x,0)=u(x,1)=0$$
$$u_x(0,y)=0 \qquad u(1,y)=y \qquad 0\le x,y\le 1$$

الف) چرا جواب این معادله به‌صورت روبرو می‌باشد؟

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch}\alpha x \sin\beta y$$

(نیازی به یافتن جواب ندارید)

ب) ضرایب $\alpha$، $\beta$ و $A_n$ را تعیین کنید.

**۲۶** صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

www.Amad-Group.ir

با استفاده از تبدیل فوریه معادله زیر را حل کنید.

$$2u_x+3u_t=0,\ u(x,0)=f(x)\ ,\ -\infty<x<\infty\ ,\ \lim_{x\to\pm\infty} u(x,t)=0$$

**۲۷** صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

معادله گرمای زیر را حل کنید.

$$u_t=u_{xx}\ ,\ 0<x<10\ ,\ t>0\ ,\ u(0,t)=0\ ,\ u(10,t)=100\ ,\ u(x,0)=50-5x$$

**۲۸** صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

سری فوریه تابع روبرو را بیابید. $f(x+2)=f(x)$ $\qquad f(x)=1-x \qquad 0\le x\le 2$

**۲۹** صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

جواب عمومی معادله مقابل را بیابید.

$$x^2 z_x+y^2 z_y=(x+y)z$$

**۳۰** صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

نخست معادله زیر را به‌صورت کانونی درآورید و سپس آن را حل کنید.

$$xu_{xx}+(x-y)u_{xy}-yu_{yy}=0$$

**۳۱** علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

سری لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{2z^2+9z-5}$ را در ناحیه $\dfrac{1}{2}<|z|<5$ بیابید.

**۳۲** علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

هریک از دو انتگرال زیر را محاسبه کنید.

الف) $$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x^2+4}\right)^2 dx$$

ب) $$\oint_{|z-1|=1}\left[\frac{e^{3z}}{\cos f(z)}+(1+z)\cos\frac{1}{z-1}+\frac{\overline{z-1}}{z-1}\right]dz$$

گروه آموزشی
www.Amad-Group.ir

**۳۳** علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

اگر C منحنی مرزی ناحیه محصور بین محور xها و نیمه بالایی دایره $x^2+y^2=R^2$ باشد با محاسبه انتگرال $\oint_C \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}dz$ نشان دهید: $\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx=\pi\ln 2$

**۳۴** علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

اگر $f(z)$ درون و روی مسیر $|z|=1$ تابعی تحلیلی بوده و $f(0)=2$ و $f'(0)=\frac{3}{2}$، مقدار انتگرال $I=\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta$ را به‌دست آورید.

**۳۵** علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

تبدیل کسری ـ خطی بیابید که دو نقطه مفروض $z_1$ و $z_2$ را بر روی نقاط $w_1=0$ و $w_2=\infty$ بنگارد سپس با استفاده از تبدیل کسری ـ خطی $w=i\frac{1-z}{1+z}$ تصویر ناحیه $D:\begin{cases}\operatorname{Im} z>0\\ |z|<1\end{cases}$ را در صفحه $w$ بیابید.

**۳۶** علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

اگر $f(z)$ تابعی همساز بوده و $\operatorname{Re}(f'(z))=3x^2-4y-3y^2$، با دو شرط $f'(0)=0$ و $f(1+i)=0$ ضابطه $f(z)$ را برحسب $z$ بیابید.

**۳۷** علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

قسمت‌های حقیقی و موهومی $w=i^{\ln(1+i)}$ را محاسبه کنید.

**۳۸** صنعتی شریف / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

مسأله زیر را با استفاده از روش جداسازی حل کنید.

$$\begin{cases} u_t=u_{xx} \quad , \quad 0<x<1, t>0 \\ u(0,t)=0 \quad , \quad u_x(1,t)+u(1,t)=0 \quad , \quad u(x,0)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

**۳۹** صنعتی شریف / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

مسأله زیر را به شکل کانونیک تبدیل کرده و آن را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx} & :-\infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=x^2 & :-\infty<x<\infty \\ u_t(x,0)=x+1 & :-\infty<x<\infty \end{cases}$$

www.Amad-Group.ir

**۴۰** صنعتی شریف / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

تبدیل فوریه تابع f با ضابطه $f(x)=e^{-ax^2}$ را محاسبه کنید $(a>0)$.

**۴۱** صنعتی شریف / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

فرض کنید f تابعی است که روی بازه $[0\,,\infty)$ با ضابطه روبرو تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x &, \ 0\le x\le \pi\\ 0 &, \ x>\pi\end{cases}$$

الف) انتگرال فوریه سینوسی f را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از قسمت (الف)، حاصل انتگرال روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)\sin(\frac{\pi x}{2})}{1-x^2}dx$$

**۴۲** صنعتی شریف / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب $T=2\pi$ است که روی بازهٔ $[-\pi\,,\pi)$ با ضابطه زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases}x+\pi & :-\pi<x<0\\ \dfrac{\pi}{2} & :x=-\pi\,,0\\ x & :0<x<\pi\end{cases}$$

الف) سری فوریه f را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از قسمت (الف)، برای هر $0\le x\le \pi$، حاصل سری‌های زیر را به‌دست آورید.

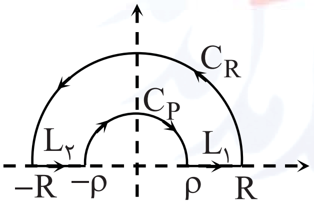
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n^3}$$

ج) با استفاده از قسمت (ب)، حاصل سری روبرو را به‌دست آورید.

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots$$

**۴۳** علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

به کمک انتگرال‌های مختلط، حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^3+4)^2}dx$ را به‌دست آورید. (راهنمایی: از مسیر بسته داده شده زیر استفاده کنید)




www.Amad-Group.ir

**۴۴** علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

الف) $\oint_{|z|=1}\left(\frac{z}{\sin z}+\frac{e^{-z^3}}{z^3}+\ln|z|\right)dz$

ب) $\oint_{|z|=4}\left(\cos z\sin\frac{1}{z}\right)dz$

ج) $\int_0^\infty \frac{x^2\sin x}{(x^2+1)(x^2+9)^2}dx$ (به کمک انتگرال‌های مختلط)

گروه آموزشی
www.Amad-Group.ir

**۴۵** علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

الف) تبدیل موبیوسی (دوخطی) بیابید که نقاط $-۱,۰,۱$ را به ترتیب به نقاط $-۱,-i,۱$ بنگارد.

ب) نشان دهید ناحیه $y \geq ۰$ (نیم صفحه فوقانی) تحت این نگاشت به دیسک واحد (نقاط درونی و مرزی محدود به دایره واحد) نگاشته می‌شود.

ج) به کمک تبدیل به‌دست آمده، نگاشتی بیابید که ناحیه واقع در $-\frac{\pi}{۶} \leq \theta \leq \frac{\pi}{۶}$ را به دیسک واحد بنگارد.

**۴۶** علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

فرض کنید $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در دامنه D تحلیلی باشد. اگر

$$U=e^{u(x,y)}\cos v(x,y) \qquad V=e^{u(x,y)}\sin v(x,y)$$

نشان دهید که در D، تابع V مزدوج همساز U است.

**۴۷** علم و صنعت ایران / پایان ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

تابع $f(z)=\frac{۱}{z}+|x|+i|y|$ داده شده است. در چه ناحیه‌ای از صفحه این تابع تحلیلی است؟ مشتق آن‌را در ناحیه تحلیلی بیابید.

**۴۸** صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

www.Amad-Group.ir

انتگرال‌های حقیقی زیر را محاسبه نمایید.

الف) $$\int_{۰}^{\infty}\frac{(۱۶-x^{۲})\cos x}{(۱۶+x^{۲})^{۲}}dx$$

ب) $$\int_{۰}^{۲\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^{۲}} \quad , \quad a>b>۰$$

**۴۹** صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

حاصل انتگرال‌های زیر را به کمک قضیه مانده‌ها به‌دست آورید.

الف) $$\oint_{|z|=۲}\operatorname{Im}(z)\cos(\bar{z})dz$$

ب) $$\int_{۰}^{۲\pi}\cos(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta$$

**۵۰** صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۵-۱۳۹۴

الف) بسط لوران تابع $f(z)=\frac{۳z^{۲}-۶z+۲}{z^{۳}-۳z^{۲}+۲z}$ را در نوار $۱<|z|<۲$ به‌دست آورید.

ب) سری لوران تابع زیر را حول نقطه $z=i$ محاسبه کرده و مانده تابع را در این نقطه به‌دست آورید.

$$f(z)=\frac{z^{۲}}{(z^{۲}+۱)^{۳}}$$

گروه آموزشی آمد www.Amad-Group.ir ۰۹۳۳۳۴۶۳۳۰۹